1 Prädikatenlogik

- Syntax der PL
  - Variable x_i (i = 1,2,3,...)
  - Prädikatssymbol P_i^k
    k Stelligkeit des P-Symbols, i laufende Nummer
  - Funktionssymbol f_i^k
    k Stelligkeit , i laufende Nummer
- Terme
  - Jede Variable ist ein Term
  - falls f ein Funktionssymbol ist, und $t_1, ..., t_k$ Terme sind, so ist auch $f_i^k(t_1, ..., t_k)$ ein Term
- Funktionssymbole der Stelligkeit 0: f_i^0 ist Konstante
- Prädikatenlogische Formel F ∈ PL ist
  1. falls P_i^k Prädikatssymbol ist und $t_1, ..., t_k$ Terme sind, so ist $P_i^k(t_1, ..., t_k)$ ein präd. Formel
     (atomare Formel der PL)
  2. ist F ∈ PL, so auch $\neg F$
  3. F und G ∈ PL, so auch $(F \vee G)$ und $(F \wedge G)$
  4. falls z eine Variable ist (z = x_j) und F ∈ PL, so auch ∃ z F (Existenzoperator) und auch ∀ z F (All-Operator)
  5. Nur solche Zeichenketten, der gemäß 1-4 in endlich vielen Schrfitten gebildet werden können sind präd. Formeln
- Variablen

  gebunden, falls x in der Teilformel ∃ x G oder ∀ x G vorkommt

  Kommt keine Variable sowohl frei als auch gebunden vor, so heißt die Formel bereinigt.

  Eine Formel F ∈ PL heißt Aussge g.d.w. jede Variable von F gebunden ist und nicht frei vorkommt.
- Matrix einer Formel F: F^*

  erhält man aus F durch Streichen aller Zeichen ∃ und ∀ einschließlich der jeweils folgenden Variablen

- Semantik von PL
  - Wähle eine Grundmenge (Universum)
  - interpretiere jedes Prädikatssymbol P^k durch ein k-stelliges Prädikat über U
  - interpretiere jedes Funktionssymbol f^k durch eine k-stellige Funktion über U
- passende Strukturen

  $\mathcal{A}$ = ($U_\mathcal{A}$,$I_\mathcal{A}$) mit U: Universum, I: Interpretation unter $\mathcal{A}$

  $I_\mathcal{A}$ bildet jedes k-stellige Prädikatssymbol P_k ab in ein k-stelliges Prädikat über U

  (Prädikat ist Relation: Teilmenge des kartesischen Produktes)

  $P_\mathcal{A} \longrightarrow$ R $\subseteq U_\mathcal{A}^k$

  $I_\mathcal{A}$ bildet jedes k-stellige Funktionssymbol f_k ab in eine k-stellige Funktion über $U_\mathcal{A}$

  jeder freien Variablen wird ein Element aus $U_\mathcal{A}$ zugeordnet
- erfüllbare Formel

  F hat Modell $\Leftrightarrow$ es existiert eine passende Struktur $\mathcal{A}$($U_\mathcal{A}$,$I_\mathcal{A}$), so dass $\mathcal{A}(F)$ = 1

  Falls jede passende Struktur für F erfüllend ist, so heißt F gültig

  F heißt unerfüllbar $\Leftrightarrow$ jede passende Struktur ist nicht erfüllend
- semantische Äquivalenz

  Zwei Formeln F, G $\in$ PL heißen (semantisch) äquivalent, falls es für jede für beide Formeln passene Struktur $\mathcal{A}$($U_\mathcal{A}$,$I_\mathcal{A}$) gilt $\mathcal{A}$(F) = $\mathcal{A}$(G)
- Äquivalenzen
  - es gelten alle aussgenlogischen Äquivalenzen
  - $\neg\forall$ x f $\equiv \exists x \neg F$
  - $\neg\exists$ x f $\equiv \forall x \neg F$
  - Falls x in G nicht frei vorkommt gilt:
    $(\forall x\ F \wedge G) \equiv \forall x\ (F \wedge G)$ und $(\forall x\ F \vee G) \equiv \forall x\ (F \vee G)$
    $(\exists x\ F \wedge G) \equiv \exists x\ (F \wedge G)$ und $(\exists x\ F \vee G) \equiv \exists x\ (F \vee G)$
  - ($\forall x$ F $\wedge \forall x$ G) $\equiv \forall x\ (F \wedge G)$
    ($\exists x$ F $\vee \exists x$ G) $\equiv \exists x\ (F \vee G)$
  - $\forall x \forall y$ F $\equiv \forall y \forall x$ F
    $\exists x \exists y$ F $\equiv \exists y \exists x$ F
  - Vorsicht:
    ($\forall x\ F \vee \forall x$ G) $\not\equiv \forall x\ (F \vee G)$
    ($\exists x\ F \wedge \exists x$G) $\not\equiv \exists x\ (F \wedge G)$

- Substitution

  Sei F $\in$ PL, x eine Variable und t ein Term. Dann ist F[x/t] die Formel $\in$ PL, die man aus F erhält, wenn man jedes freie Vorkommen von x in F durch den Term t ersetzt.

- Lemma (gebundene Umbenennung)

  Sei F = QzG $\in$ PL mit Q $\in$ $\{\forall, \exists\}$ (Q: Quantor)

  Es sei y eine Variable, die nicht in G vorkommt.

  Dann gilt F $\equiv$ QyG[z,y]

- Lemma

  Zu jeder Formel F $\in$ PL gibt es eine (semantisch) äquivalente Formel G die bereinigt ist

- Pränexform (Normalform)

  Eine Formel F $\in$ PL heißt pränex oder in Pränexform, falls sie die Form hat:

  F = $Q_1 y_1 Q_2 y_2, ..., Q_n y_n F^*$ (F^* enthält keine Quantoren)

- Satz

  Für jede Formel F $\in$ PL gibt es eine äquivalente (und bereinigte) Formel BPF(F) in Pränexform F $\equiv$ BPF(F)

  BPF: bereinigte Pränexform

  Beweis: durch strukturelle Induktion (mit Äquivalenzregeln)

- Skolem-Normalform mit Skolem-Algorithmus

  Input: F in Pränexform (bereinigt), F = $Q_1 y_1 Q_2 y_2 ... Q_n y_n F^*$

  while F enthält einen Existenzquantor do

  o.E. F = $\forall y_1 \forall y_2 ... \forall y_k \exists y_{k+1} (... Q_n y_n F^*)$

  Sei $f_{j_1}^k$ ein neues k-stelliges Funktionssymbol

  ersetze F $\leftarrow$ $\forall y_1 \forall y_2 ... \forall y_k G_{[y_{k+1} | f_{j_1}(y_1, y_2, ..., y_k)]}$

  end

  Output: Output ist eine Formel aus PL ohne Existenzquantor

- Satz (Erfüllbarkeitsäquivalenz)

  Für jede Formel F in BPF gilt:

  F ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ SKOLEM(F) erfüllbar

- Entscheidung der Erfüllbarkeit: nutze Herbrand-Universum (Jaques Herbrand)

  $U_H(F)$: Menge aller variablenfreien Terme von F und Funktionssymbole

  $U_H(F) = \{a_1, ..a_{q_0}, f_1^1(a_1), ...f_1^1(a_{q_0}), f_2^1(a_1), ..., f_2^1(a_{q_0}), ..., f_2^2(a_{q_0}, a_1), ...\}$

  ist abzählbar unendlich, falls es min. eine Konstante gibt und ein k-stelliges Funktionssymbol mit k $\geq$ 1

- Definition Herbrand-Struktur

  $\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}})$

  $\mathcal{A}$ ist Herbrand-Struktur, wenn gilt:

  1. $U_{\mathcal{A}} = U_H(F)$
  2. für jedes in F vorkommende Funktionssymbol f^k und $t_1, ..., t_k \in U_H(F)$ ist $\mathcal{A}(f^k)(t_1, ..., t_k) = f(t_1, ..., t_k) \in U_H(F)$
     kurz: $\mathcal{A}$(t) = t

- Satz (F in Skolemform)

  F erfüllbar $\Leftrightarrow$ F besitzt Herbrand-Modell

  Beweis:

  $\leftarrow$: klar

  $\rightarrow$: Konstruktion des Herbrand-Modell

- Herbrand-Expansion

  F = $\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n F^*$

  Dann ist E(F) = $\{F^*[x_1|t_1][x_2|t_2]...[x_n|t_n] \mid t_1, ..., t_n \in U_H(F)\}$

  z.B.: $\forall x \forall y \forall z P(x, f(y), g(x, z))$

  $U_H(F) = \{a, f(a), g(a, a), f(g(a, a)), g(f(a), a)\}$

  E(F) = $\{P(a, f(a), g(a, a)), P(g(a, a), f(f(a)), g(a, a)), ...\} = \{F_1, F_2, F_3, ...\}$

  (Menge von AL-Formeln)

- Satz (Gödel-Herbrand-Skolem)

  Für jede Aussagen F $\in$ PL in Skolemnormalform gilt:

  F erfüllbar $\Leftrightarrow$ E(F) erfüllbar

- Satz (Herbrand)

  Eine Aussage F (in Skolemform) ist unerfüllbar $\Leftrightarrow$ es ex. endliche Teilmenge von E(F) die (im AL-Sinne) unerfüllbar ist

- Algorithmus von Gilmore

  Input: F in Skolemform, E(F)

  n = 0

  wiederhole

  n = n+1

  bis $(F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_n)$ ist unerfüllbar

  Output: gibt "F ist unerfüllbar"

  Semi-Entscheidungsverfahren

  Folge: F ist unerfüllbar $\Leftrightarrow \neg F$ ist gültig

  $\mathcal{A}(F) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A}(\neg F) = 1$

- Das Unerfüllbarkeitsproblem und das Gültigkeitsproblem sind semi-entscheidbar

- Satz

  Das Entscheidungsproblem der PL (gegeben eine Formel F $\in$ PL: ist F erfüllbar?) ist unentscheidbar!

- Grundresolution (der PL)

  Input: Aussage F in Skolem-Form mit Matrix F^* in KNF

  E(F) = $\{F_1, F_2, ...\}$

  i = 0

  M = $\varnothing$

  wiederhole

  i = i+1

  M = M $\cup$ $\{F_i\}$

  M = Res^*(M)

  wobei () $\in$ M

  gibt "unerfüllbar" aus und stoppt