# 1 Basis, Dimension, Unterräume

- Vektorraum

  Ein K-Vekotrraum V ist ein Tupel (V,+,·) mit der Eigenschaft, dass (V,+) eine abelsche Gruppe ist und die Skalarmultiplikation folgende Regeln einhält:

  $\forall v, w \in V \ \forall k_1, k_2 \in K$

  $(v + w) \cdot k_1 = v \cdot k_1 + w \cdot k_1$

  $v(k_1 + k_2) = vk_1 + vk_2$

  $v(k_1 \cdot k_2) = (vk_1)k_2$

  $v \cdot 1 = v$

  Das Rechnen im Vektorraum lässt sich auf das Rechnen im Körper zurückführen indem man eine feste Basis wählt. Somit hat jeder Vektor eine eindeutige Koordinatendarstellung $(k_1, ..., k_n)$ und die Addition bzw. Skalarmultiplikation lässt sich im Körper durchführen: f : V $\to K^n$ : v $\to (k_1, ..., k_n)$ ist ein Isomorphismus.

- Was ist eine Basis?

  - linear unabhängiges Erzeugendensystem
  - Minimales Erzeugendensystem von VR
  - maximale linear unabhängige Teilmenge

- Gibt es mehrere Basen?

  Es gibt immer mehrere Basen zum gleichen VR. Sie haben immer gleiche Länge. (über $\mathbb{R}$ gibt es sogar überabzählbar unendlich viele)

  Beweis:

  Sei B = $\{b_1, b_2\}$ Basis von VR V.

  Annahme: E = $\{e_1, e_2, e_3\}$ sei ebenfalls Basis. Mit Darstellung der Basis E mit Basisvektoren von B ergibt sich ein Widerspruch.

  oder:

  Sei B Basis $|B|$ = n, X $\subseteq$ V l.u., dann ist $|X| \leq$ n und es existiert $B_0 \in$ B mit

  B' =X $\cup$ $B_0$ Basis $\Rightarrow$ $|B| \leq$ und $|B'|$ $|B'| \leq |B|$, da beide l.u. sind.

- Was ist die Dimension?

  gemeinsame Mächtigkeit aller Basen eines endlich erzeugten VR heißt Dimension.

- Existiert immer eine Basis?

  Für endlich erzeugte VR existieren immer endliche Erzeugendensystem und damit gibt es eines mit minimaler Länge.

  Für unenelich erzeugte VR braucht man hierfür das Lemma von Zorn

- Austausch von Steinitz

  Sei V ein ein endlich dimensionaler VR

  - Jede linear unabhängige Teilmenge eine VR kann zu einer Basis ergänzt werden
  - $\{b_1, ..., b_n\}$ sei Basis $\Rightarrow \{b_1, b_2 + b_1, ..., b_n + b_1\}$ ebenfalls Basis

- Beispiele für unendlich dimensionale Vektorräume

  - abzählbar unendlich: Polynomraum R[x] mit Basis $\{1, x, x^2, ...\}$
  - überabzählbar unendlich: Menge der stetigen Funktionen

    Beweis: Funktionen der Form $exp(ax)$ mit $a \in \mathbb{R}$ sind schon eine überabzählbare Teilmenge

  Raum der Polynome vom Grad $\leq 10$ hat die Dimension 11

  Beim Polynomring kann man eine Basis explizit angeben, aber beim VR $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$ kann man keine Basis angeben

- Vektorraum $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$

  Sei K ein Teilkörper von L. L ist auf natürliche Weise ein K-Vektorraum, d.h. die Verknüpfungen liegen auf der Hand: Die Addition ist die von L, und die Skalarmultiplikation ist die Einschränkung der Multiplikation L x L $\rightarrow$ L auf K x L $\rightarrow$ L.

  D.h. dann da $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ , dass $\mathbb{R}$ in natürlicher Weise ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist. Dieser Vektorraum hat überabzählbare Dimension.

  In diesem Vektorraum sind die Skalare aus $\mathbb{Q}$, und die Vektoren aus $\mathbb{R}$

  Die Logarithmen der Primzahlen (nicht in $\mathbb{Q}$ enthalten) bilden eine unendliche linear unabhängige Teilmenge von Vektoren, also kann man sie laut Steinitz zu einer Basis fortsetzen. Somit ist die Dimension unendlich.

  Mit V $\cong K^n$, V n-dimensional, gilt also

  $\|\mathbb{R}\| = \|\mathbb{Q}^{dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}}\| = \|\mathbb{N}^{dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}}\| = \|dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}\|$

- Basis des Vektorraum $\mathbb{R}$ über $\mathbb{R}$

  $\{1\}$ bzw. jede andere reelle Zahl außer 0.

- In welchen Vekorräumen ist die Basis eindeutig bestimmt

  $V = \{0\}$

  Basis: die leere Menge, da es keine linear unabhängige Kombination von Elementen aus dem Vektorraum gibt und somit, die leere Menge die einzige maximale linear unabhängige Teilmenge ist, also die Basis.

  $\mathbb{F}_2$ als Vektorraum: hat die $\{1\}$ als Basis

- Wie ist ein Unterraum definiert?

  U $\subset$ V heißt Unterraum von V, wenn

  (U1) $u_1 + u_2 \in U \ \forall_{u_1, u_2 \in U}$

  (U2) a * u $\in U \ \forall_{u, \in U, a \in K}$

  (U3) $0 \in U$

- Dimensionssatz für Unterräume

  dim U + dim W = dim(U + W) + dim(U $\cap$ W)

- lineare Unabhängigkeit von Vektoren

  $v_1, ..., v_n$ l.u., $k_1, ..., k_n \in K$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i k_i = 0 \Rightarrow k_j = 0, \quad 1 \leq j \leq n$$

- Warum sind 4 Vektoren im $\mathbb{R}^3$ linear abhängig

  Wir nehmen an 3 Vektoren sind l.u., so würden sie $\mathbb{R}^3$ erzeugen, aber dann läge der vierte in ihrem Erzeugnis

## 2 Lineare Abbildungen

- Was ist eine lineare Abbildung?

  V, W K-VR, $\alpha : V \to W$

  1. $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha(v_1) + \alpha(v_2)$ (Additiviät)
  2. $\alpha(av) = a\alpha(v)$ (Homogenität)

- Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Matrizen

  Lineare Abbildungen werden bezüglich einer Basis durch die Koeffizientenmatrix beschrieben.

  In den Spalten stehen die Bilder der Basisvektoren.

  f: V $\to$ W, A = $\{u_1, ..., u_r\}$, B = $\{v_1, ..., v_s\}$ Basen von V,W

  $$f(u_j) = \sum_{i=1}^{s} a_{ij}\ v_i\ ,\quad 1 \leq j \leq r$$

  $M_f(A, B) = (a_{ij}) \in K^{r \times s}$ heißt darstellende Matrix von f bzgl. der Basen A und B

- Dimensionssatz für lineare Abbildungen (endl.-dim VR)

  dim V = Rang f + Defekt f = dim Kern + dim Bild = dim(f(V)) + dim($f^{-1}$(0))

- Isomorphiesatz für K-VR

  Zwei endlich dimensionale K-VR sind genau dann isomorph, wenn sie gleiche Dimension haben

- Äquivalente Matrizen

  A,B $\in$ M(m $\times$ n,K) heißen äquivalent, wenn es invertierbare Matrizen P, Q gibt mit B = QAP

  Zwei gleichformatige Matrizen sind äquivalent $\Leftrightarrow$ gleicher Rang

  Dies ist eine Äquivalenzrelation. Es gibt 1 + min(m,n) Äquivalenzklassen von m $\times$ n - Matrizen. Für n $\times$ n - Matrizen gibt es n + 1 Äquivalenzklassen.

  Matrizen von rg(A) = r sind äquivalent zu $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (Repräsentanten

  Die darstellenden Matrizen für $\alpha : V \to W mit M_\alpha(A, B)$ bilden eine komplette Äquivalenzklasse.

- Ähnliche Matrizen

  A,B $\in$ M(n,K) heißen ähnlich, wenn es Matrix P gibt mit B = $P_{-1}$AP

Ähnliche Matrizen beschreiben denselben Endomorphismus bzgl. verschiedener Basispaare.

Ähnlichkeit ist eine Äquivalenzrelation. Für eine Abbildung gibt es bei endlichen Körpern endlich viele Ähnlichkeitsklassen (und somit endlich viele Normalformen), sonst unendlich viele.

Jede Matrix A ist ähnlich zu genau einer JNF (bis auf Umordnung)

Ähnliche Matrizen sind äquivalent

Invarianzen bei Ähnlichkeit:

- Rang
- Eigenwerte
- Dimension der Eigenräume

- Basiswechsel

  Seien B,B' Basen von V und C,C' Basen von W. Dann gilt beim Basiswechsel von B,C zu B',C':

  ${}_{B'}f_{C'} = {}_{C}id_{C'} \; {}_{B}f_{C} \; {}_{B'}id_{B}$ bzw. ${}_{B'}f_{C'} = {}_{C'}id_{C}^{-1} \; {}_{B}f_{C} \; {}_{B'}id_{B}$

  Bei Basiswechsel von B,C zu B',C' beschreiben die Matrizen A und A' die gleiche lineare Abbildung bzgl. der verschiedenen Basen.

  - $\alpha : V \to V$ : Matrizen A und A' sind ähnlich (Endomorphismen)
  - $\alpha : V \to W$ : A und A' sind äquivalent

- Zusammenhang Bijektivität, Injektivität, Surjektivität

  f: $V \to V$ (V endl.-dim) ist bijektiv ⇔ injektiv oder surjektiv

  (bzw: V → W, dim V = dim W)

  Beweis:

  f injektiv ⇒ $f^{-1}(0) = 0$ ⇒ dim Kern = 0 ⇒ dim Bild = dim V ⇒ f surjektiv

  Warum gilt dies nur für endliche Dimension?

  Gegenbeispiel: sei V der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$ mit Basis $\{1, x, x_2, ...\}$

  Differentiation ist lineare Abbildung, surjektiv, da zu jedem p ∈ V eine Stammfunktion existiert, aber nicht injektiv, da verschiedene Polynome die gleiche Ableitung haben (z.B $(x^2 + 1)' = 2x = (x^2 + 2)'$). Insbesondere besteht der Kern aus allen konstanten Polynomen.

- Injektivität und Surjektivität bei Abbildungen

  f: $K^n \to K^m$

  f surjektiv ⇔ Rang(f) = m

  f injektiv ⇔ Rang(f) = n

- Lineare Abbildung schon durch Zuordnung der Basisvektoren eindeutig

$$v = \sum_{i=1}^{n} b_i k_i \Rightarrow f(v) = f(\sum_{i=1}^{n} b_i k_i) = \sum_{i=1}^{n} f(b_i) k_i$$

- Determinantenfunktion

  3 Bedingungen für Determinantenfunktion

  (DF1) $\Delta(v_1, ..., \lambda v_i + \mu w_i, ..., v_n) = \lambda\Delta(v_1, ..., v_i, ..., v_n) + \mu\Delta(v_1, ..., w_i, ..., v_n)$

  (Linearität in jedem Argument)

  (DF2) $\Delta(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_n) = -\Delta(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_n)$ (alternierend)

  (DF3) $\Delta(e_1, ..., e_n) = 1$

  Eigenschaften von Determinanten:

  - Zeilenvertauschung: det A' = -det A
  - Addition einer Zeile zu einer anderen: det A' = det A
  - Multiplikation einer Zeile mit k: det A' = k $\cdot$ det A
  - det (A$\cdot$ B) = det A $\cdot$ det B

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \cdot & \\ & & \cdot \\ & & a_{nn} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

- Determinante

  Eine Determinante ist eine k-lineare Form

  det A = 0 $\Leftrightarrow$ 2 Vekoren linear abhängig (auch: Nachweis der linearen Unabhängigkeit)

  Die Determinante ist immer konstruierbar mit Leibniz Formel(normierte alternierende Linearform)

  $V^n \to K$ (V n-dimensional)

$$det\ A = \sum_{\pi \in S_n} sign(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)}$$

  Beweis: per Induktion

  sign($\pi$) ist notwendig wegen dem Zeilenvertauschungsaxiom.

- det A = 0, aber keine zwei Vektoren l.a. ?

  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Ausrechnen der Determinante am Besten mit Laplace-Entwicklung

$$det\ A\ =\ \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\ a_{ij}\ det(A_{ij})\ Entwicklung\ nach\ i - ter\ Zeile$$

- Beispiele für lineare Abbildungen

  Folgen: Limes ist lineare Abbildung vom VR aller konvergenten Folgen in $\mathbb{R}$

  Funktionen: Integral ist lin. Abb. vom VR aller diffbaren Funktion in VR $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

- Begriffsklärung

  Hom (V,W) $\cong$ lineare Abbildungen von V nach W

  End(V) = Hom (V,V)

  GL(V) $\cong$ lineare Abbildungen von V nach V, also Automorphismen

  $\cong$ Menge aller invertierbaren Matrizen (Rang f = max. $\Leftrightarrow$ det A $\neq$ 0)

# 3 Lineare Gleichungssysteme

- Affine Teilräume (Faktorraum)

  Es sei V irgendein Vektorraum und U ein Unterraum von V. Die Teilmengen der Form v + U := {v + u | u ∈ U } heißen affine Teilräume von V. Ein affiner Teilraum wird manchmal auch lineare Mannigfaltigkeit oder Nebenklasse des Unterraums U genannt. Der Vektor v heißt Stützvektor von v + U , der Unterraum U heißt Richtung von v + U.

  Der Faktorraum $V_{|U}$ = {v + U | v ∈ V} ist Menge aller affinen Teilräume zu U.

- homogene lineare Gleichungssysteme

  Ax = 0 haben immer die triviale Lösung.

- inhomgene lineare Gleichungssysteme

  Ax = b sind lösbar, wenn rg A = rg (A,b)

  betrachte affine Teilräume v + U mit Lösungsraum U von Ax = 0, v Lösung von Ax = b

- Cramersche Regel

  Ax = b, A = $(a_{ij})$, b = $\{b_1, ..., b_n\}^T$

  det A ≠ 0 ⇒ $x_j = \frac{1}{detA} * det(s_1, ...s_{i-1}, b, s_{i+1}, ..., s_n)$

  dabei wird für jede Komponente $x_i$ die i-te Spalte von A durch b ersetzt.

- Gaußalgorithmus

  A ≠ 0 eine m × n - Matrix

  1. In der ersten Spalte ≠ 0, also z.B. in der j-ten Spalte durch Zeilenvertauschungen $a_{1j} \neq 0$ erreich
  2. Durch Aufaddieren eines Vielfachen der ersten Zeile auf die folgenden in der j-ten Spalte lauter Nullen erzeugen
  3. Die erste Zeile unverändert lassen und mit der Restmatrix das Verfahren wiederholen ⇒ Treppenform

  Für jede Matrix A existiert eine invertierbare Matrix B so dass BA in Treppenform ist rg A = rg BA

- im $\mathbb{R}^2$ ein LGS, dass Ellipse als Lsg. hat?

  Nein, Ellipsen sind keine affinen UR von $\mathbb{R}^2$, außerdem werden Ellipsen durch quadratische Gleichungen beschrieben

- Gibt es LGS mit genau 10 Lsg.?

  Nein, da 10 keine Primzahl oder Primzahlpotenz und der Lösungsraum ja als affiner UR ≅ $\mathbb{K}^n$

## 4 Eigenvektoren, Eigenwerte

- Diagonalisierbarkeit (nur sinnvoll bei Selbstabbildungen)

  Matrix ist diagonalisierbar, wenn sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist oder A zu den n Eigenwerten verschiedene EV hat, also eine Basis aus EV.

  Matrix diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ charakteristische Polynom zerfällt in Linearfaktoren und $\forall$ EW alg. VFH = geom. VFH

  $\Rightarrow$ Es existiert eine Basis von V aus EV

- Triagonalisierbarkeit (ähnlich zu Dreiecksmatrix)

  $\chi_A$ zerfällt in Linearfaktoren

- geometrische und algebraische Vielfachheit

  Geometrische VFH: Dimension des Eigenraums zu Eigenwert $\lambda \in K$ eines Endomorphismus

  dim(ker($\lambda \cdot$ id - f))

  Algebraische VFH: Potenz der Nullstelle $\lambda$ des charakteristischen Polynoms

  $1 \leq$ geom. VFH $\leq$ alg. VFH

- Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenräume

  $\phi(v) = \lambda$v $\Rightarrow \lambda$ ist EW zum EV v $\neq$ 0 , $\phi(v) \in < v >$

  Lineare Abbildungen haben immer Eigenwerte, wenn sie über algebraisch abgeschlossenen Körpern definiert sind.

  Matrix ohne EW: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{Q}$

  In der Praxis werden Eigenwerte druch die Nullstellen des Minimalpolynoms bzw. charakteristischen Polynoms bestimmt.

  det(Ex - A) = 0

  Eigenraum: ker(A - kE), k Eigenwert

- Eigenwerte eine Dreiecksmatrix

  sind genau die Diagonalelemente

- Gibt es $3 \times 3$ - Matrix über $\mathbb{R}$ ohne Eigenwerte

  Nein, da Polynome 3.ten Grades i.A. reduzibel sind.

  Aber z.B. über $\mathbb{F}_2$ irreduzibel $x^3 + x + 1$

- Minimalpolynom

  Das MP besteht nur aus linearen irreduziblen Faktoren mit MP kleinstmöglicher Grad, so dass MP(A) = 0

Beispiel zur Berechnung des Minimalpolynoms der Matrix A $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in$ $M_3(\mathbb{R})$

In Menth s.149-151 (iterierte Kerne)

- Gibt es zu jedem Polynom Matrix, die diese Polynom als charakteristisches hat?

  Ja mit Frobenius Normalform:

  $$\begin{pmatrix} 0 & & & & & -a_0 \\ 1 & . & & & & -a_1 \\ & . & . & & & . \\ & & . & . & & . \\ & & & . & 0 & -a_{n-2} \\ & & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

  mit $\chi_{F_b} = x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} \ + \ . \ . \ . \ + \ a_1 x + a_0$

- charakteristische Polynom

  Berechnung: det(xE - A)

  Man kann von den Potenzen der irreduziblen Faktoren des charakteristischen Polynoms i.A. nicht auf die Potenzen des Minimalpolynoms schließen, umgekehrt liefert das Minimalpolynom eine untere Schranke der Vielfachheit im charakteristischen Polynom.

  Minimalpolynom und charakteristisches Polynom haben aber die gleichen irreduziblen Faktoren (Nullstellen)

- Beispiele für nicht diagonalisierbare Matrizen

  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{R}$ mit Minimalpolynom $x^2 + 1$

  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{C}$ mit Minimalpolynom $(x-1)^2$

  $\Rightarrow$ auch über $\mathbb{C}$ sind nicht alle Matrizen diagonalisierbar

- Satz von Cayley-Hamilton

  Das charakteristische Polynom $\chi_A$ annulliert $\alpha$ bzw. A

  $\Rightarrow \chi_A(\alpha) = 0$ bzw $\chi_A(A) = 0$

  $\phi(A) = A^n - a_{n-1} \cdot A^{n-1} \pm ... + (-1)^n \cdot a_0 \cdot E = 0$

  Das charakteristische Polynom ist ein Vielfaches des Minimalpolynoms. char. Polynom und Minpol haben die selben Primfaktoren

- Drehen um Winkel $\Phi$ im $\mathbb{R}^2$

  $\begin{pmatrix} cos\ \Phi & -sin\ \Phi \\ sin\ \Phi & cos\ \Phi \end{pmatrix}$

$\chi_A = x^2 - (2cos(\phi)) * x + 1 = 0$ EW = $\pm$ 1

Drehung um 360° $\Rightarrow \chi_A = x^2 - (2cos(\phi)) * x + 1 = x^2 - (2 * 1) * x + 1 = 0$, also EW = 1, ER = V

Drehung um 180° $\Rightarrow \chi_A = x^2 - (2cos(\phi)) * x + 1 = x^2 - (2 * (-1)) * x + 1 = 0$, also EW = -1, ER = V

# 5 Euklidische und unitäre Vektorräume

- Skalarprodukt

  Ein Skalarprodukt ist eine positiv definite, symmetrische Bilinearform:

  1. S(v,w) = S(w,v)
  2. $S(v_1 + v_2, w) = S(v_1, w) + S(v_2, w)$
  3. S(v,v) $\geq 0$

- Länge, Norm

  $\|v\| = \sqrt{S(v,v)}$

- Beispiel für Skalarprodukt (euklidisches Skalarprodukt)

$$S(x,y) \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i \;\cdot\; y_i \;\; mit\; x, y \in \mathbb{R}^n$$

- Überprüfen ob Skalarprodukt

  S(x,y) = $x^T$Ay und überprüfen der Axiome

- Orthonormalbasis

  Eine Orthonormalbasis ist eine Basis aus normierten Vekotren. Das Skalarprodkut zwei beliebiger verschiedener Vektoren ist 0. Jeder Vektorraum besitzt eine Orthonormalbasis.

  Gram-Schmidtsches Orthonormierungsverfahren:

  Zu jedem höchstens abzählbaren System $(v_1, v_2, ...)$ linear unabhängiger Vekoren eines euklidischen/unitären Vektorraums existiert genau eine ONS $(e_1, e_2, ...)$ mit folgenden Eigenschaften:

  1. $< v_1, ..., v_k >=< e_1, ..., e_k >$ für k $\in \mathbb{N}$
  2. Die zugehörige Basistransformationsmatrix ist jeweils eine Dreiecksmatrix mit reeller positiver Determinante.

     Mit $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ gilt rekursiv

$$e_{k+1} = \frac{v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k}(v_{k+1}e_i)e_i}{|v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k}(v_{k+1}e_i)e_i|} \quad k \in \mathbb{N}$$

     Insbesondere lässt sich bei höchstens abzählbarer Dimension jedes endliche ONS zu einer ONB fortsetzen, d.h. es ex. immer eine ONB unter diesen Bedingungen

     Beweis: Induktion

# 6 Normalformen

- Warum benutzt man Jordan Normalform

  einfache Matrix mit vielen Nullen an der man das Minimalpolynom und (soweit vorhanden) EW und Dimension der ER ablesen kann

- Vorraussetzungen für Jordan Normalform

  $\chi_A$ zerfällt in Linearfaktoren. Dies löst das Ähnlichkeitsproblem in algebraisch abgeschlossenen Körpern

- Was ist JNF

  Zerlegung in f-invariante Unterräume, bestehend aus Jordan-Kästchen. V $= \oplus_{i=1}^{n} U_i$

  (direkte Summe von f-invarianten UR $U_i$

  Normalformen sind Zerlegung in Ähnlichkeitsklassen bzw. ein Repräsentantensystem dieser Zerlegung

- Jordan Kästchen

  $$\begin{pmatrix} c & & & & \\ 1 & c & & & \\ & . & . & & \\ & & . & . & \\ & & & 1 & c \end{pmatrix}$$ zum Eigenwert c.

  Rang eines Jordan-Kästchens ins maxinmal (n), außer EW $= 0 \Rightarrow$ n-1

  Die Dimension des Eigenraums eines $3 \times 3$ Kästchens ist 2

- Jordan-Normalform

  Blockdiagonalform mit Jordan-Kästchen. Anzahl Jordanblöcke zu c = Dimension des Eigenraumes zum EW c.

  Die Jordannormalform ist eindeutig bis auf die Reihenfolge.

  Jordan-Normalform $\Leftrightarrow$ Minimalpolynom zerfällt in Linearfaktoren

  diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ Minimalpolynom zerfällt in lauter verschiedene Linearfaktoren

  Reelle Matrizen haben i.A. keine Jordan-Normalform, JNF ist nur sinnvoll über algebraisch abgeschlossenen Körpern ($\mathbb{C}$).

  Wenn zwei Matrizen die selbe JNF haben, dann beschreiben sie die gleiche Abbildung (sie sind ähnlich)

- Eigenschaften des charakteristischen Polynoms

  $\chi_A = \prod_{i=1}^{n} (x - k_i)^{n_i}$

  A invertierbar $\Leftrightarrow$ alle $k_i \neq 0$

  A diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ alle $n_i = 1$

- Angabe von $\chi_A$ und $m_A$ zu Matrix A mit JNF

  Jordankästchen $J_{n_i}\ (k_i)$ $1 \leq i \leq r$

  $$\chi_A = \prod_{i=1}^{n} (x - k_i)^{n_i}$$

  $$m_A = \prod_{j=1}^{s} (x - k_j)^{m_j}$$

  mit $k_j$ paarweise verschiedene EW und $m_j$ Größe des größten Jordankastens zum EW $k_j$

- Nilpotenz

  Matrix N ist nilpotent, wenn ein m $\in \mathbb{N}$ $N^m = 0$ mit Nilpotenzstufe m

- JNF bei nilpotenten Matrizen

  Das Minimalpolynom ist $x^k \Rightarrow$ Jordanblöcke zum EW 0

  Alle Jordan-Normalformen einer nilpotenten $5 \times 5$ Matrix: Kästchen wie oben mit Größen (1,1,1,1,1), (1,1,1,2), (1,2,2), (1,1,3), (2,3), (1,4), (5)

  Man kann aus JNF folgen ob Abbildung nilpotent, mit:

  1. alle EW = 0 und Körper algebraisch abgeschlossen
  2. alle EW = 0 und es existieren genau n EW

  Stufe der Nilpotenz: Dimension des größten Jordan-Kastens

- Sieht man Bijektiviätt

  kein EW = 0 $\Leftrightarrow$ Abbildung bijektiv,

  denn wenn es so wäre Ker($0 \cdot E_n$ - A) = Ker(A) ist nicht trivial (wg. EV)

# 7 Analytische Geometrie

- Inzidenzstruktur

  Das Tripel (P,L,I) ist eine Inzidenzstruktur

  P: Menge der Punkte

  L: Menge der Geraden

  I: Inzidenzen I $\subseteq$ P $\times$ L mit pIL $\Leftrightarrow$ (p,L) $\in$ I

  Punkte sind kollinear, wenn sie auf einer Geraden liegen.

- Was ist ein affiner Raum

  L = {aK + b | a,b $\in$ V, a $\neq$ 0}

  AG(V) = (V,L,$\in$) = affine Geometrie (affiner Raum)

  Geraden durch 0 $\in$ V sind Untervektorräume

  $AG_2\mathbb{R}$ = ($\mathbb{R}^2$,L,$\in$) "ist" unsere Anschaungsebene

  $AG_3\mathbb{R}$ = ($\mathbb{R}^3$,L,$\in$) "ist" unsere Anschaungsraum

- Was ist eine Kollineation?

  Kollineation zwischen zwei Inzidenzstrukturen (P,L,I) und (P',L',I') ist ein Paar ($\alpha\beta$) von Bijektionen

  $\alpha$ : P $\rightarrow$ P'

  $\beta$ : L $\rightarrow$ L'

  mit pIL $\Leftrightarrow$ $\alpha$(p)I'$\beta$(L) für alle p $\in$ P, L $\in$ L

- Verbindungsgerade

  pq = (p - q)K + q = (q-p)K + p

- affiner Unterraum

  AG(V) = (P,L,$\in$), X $\subseteq$ P heißt affiner Unterraum mit

  $(x_1, ..., x_n \in X),\ (k_1, ..., k_n \in K)$

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \ = \ 1 \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^{n} x_i k_i \in X$$

- Zusammenhang Untervektorraum, affiner Unterraum

  X affiner Unterraum $\Rightarrow$ Für jedes x $\in$ X ist U = X - x ein Untervektorraum.

  U ist Richtung von X.

- Zusammenhang mit linearen Gleichungssystemen

  A m $\times$ n - Matrix aus K , b $\in K^m$

  L = $\{x \in K^n \mid Ax = b\}$ ist Lösungsmenge von Ax = b

  ist affiner Unterraum von AG $(K^n)$, denn $x_1, ..., x_n \in L$ und $k_1, ..., k_n \in K$ mit $\sum k_i = 1$ und somit L = a + U, U = $\{x \in K^n \mid Ax = 0\}$

- Parallelität von affinen Unterräumen

  A $\|$ B , falls A und B die gleiche Richtung haben

  A $\|$ B $\Leftrightarrow$ A = B oder A $\cap$ B = $\emptyset$

- Parallelogramme

  (a,b,c,d) heißt Viereck, wenn keine 3 oder 4 Punkte kollinear. Dieses ist ein Parallelgramm, falls ab $\|$ cd und ac $\|$ bd

  Parallelogramm $\Leftrightarrow$ d = b + c - a

- Translation

  $\tau_v : V \rightarrow V, v \in V \;\; \tau_v = x + v$ ist Kollineation

  $\tau_{v+w} = \tau_v \circ \tau_w$

  $\tau_v \circ \alpha : V \rightarrow V : x \mapsto \alpha(x) + v, v \in V, \alpha \in GL(V)$ nennt man Affinitäten

- Semilineare Abbildung

  $\alpha : V \rightarrow V'$ heißt semilinear falls gilt:

  $\alpha$(x+y) = $\alpha$(x) + $\alpha$(y)

  $\alpha$(xk) = $\alpha$(x) $\gamma$(k) mit $\gamma$ : K $\rightarrow$ K' (Körperisomorphismus)

  $\Rightarrow$ $\alpha$ ist $\gamma$-semilinear

- Körperisomorphismus

  $\gamma$ : K $\rightarrow$ K', bijektiv ist Körperisomorphismus mit:

  $\gamma$(k + l) = $\gamma$(k) + $\gamma$(l)

  $\gamma$(kl) = $\gamma$(k) $\gamma$(l) für k,l $\in$ K

- Fundamentalsatz der affinen Geometrie

  V K-VR und V' K'-VR, $|K|$ ¿ 2, dim V ¿ 1

  Dann sind die Kollineationen $\phi$ von AG(V) auf AG(V') genau die Abbildungen der Form

  $\phi = \tau_w \circ \alpha$: V $\rightarrow$ V': X $\mapsto$ $\alpha$(x) + w

  mit w $\in$ V', $\alpha$: V $\rightarrow$ V' semilineare Bijektion

  Beweisskizze: Zeige $\alpha$ ist semilinear (Additivität, Konstruktion des Körperisomorphismus)

- Euklidische Räume

  (V,f) mit f einer positiv definiten Bilinearform (Skalarprodukt)

  Zwei euklidische Räume V,V' mit Metriken d, d' (Abstandsfunktion)

  $\alpha$: V $\rightarrow$ V' heißt isometrisch, falls d(x,y) = d'($\alpha$(x),$\alpha$(y)) $\forall$ x,y $\in$ V

  Ist $\alpha$ zusätzlich surjektiv, so heißt $\alpha$ eine Isometrie

- Projektive Geometrie

  $Gr_k$(V) ist die Menge der k-dim. Unterräume

  PG(V) = $(Gr_1(V), Gr_2(V), \subseteq)$ ist projektiver Raum zu V

  $PG_nK = PG(K^{n+1})$

  $V^+$ = V $\oplus$ K dim $V^+$ = dim V + 1

  Eigenschaften:

  - Zu zwei verschiedenen Punkten ex. genau eine Verbindungsgerade
  - dim V $\geq$ 4 $\Rightarrow$ es ex. Geraden, die windschief sind
  - dim V = 3: zu zwei verschiedenen Geraden ex. genau ein Schnittpunkt
  - Veblen-Young-Axiom: a,b,c,d Punkt und ad und bc schneiden sich $\Rightarrow$ auch ab und cd schneiden sich. Die Parallelität wird ausgeschlossen durch die Fernpunkte, die bei Parallelität gleich sind (gleiche Richtung der Geraden)
  - Fernpunkte sind Punkte im Unendlichen (auf der Ferngeraden) und entsprechen der Geradenrichtung

- Beispiel

  Gerade von AG(V): a + bK $\Rightarrow$ $\alpha$(a + bK) = $Gr_1$(<(a,1),(b,0)>$_{linear}$)$\setminus\{(b,0)K\}$. Mit $\alpha$ bettet man AG(V) in PG(V) ein