1 $\mathbb{R}$elle Zahlen

- bis auf Isomorphie einziger vollständig linear geordneter Körper der $\mathbb{Q}$ als Unterkörper enthält
- totalgeordnete Menge besitzt Supremumseigenschaft, wenn jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge A ein Supremum besitzt
- linear geordneter Körper, der die Supremumseigenschaft besitzt heißt vollständig
- in $\mathbb{Q}$ sind Gleichungen der Form: $x^n =$ y nicht immer lösbar. Deshalb definieren wir die reellen Zahlen (als evtl. fehlendes Supremum einer Teilmenge von $\mathbb{Q}$).
- Konstruktion von $\mathbb{R}$ mit Dedekindschem Schnitt
- Eigenschaften
  - archimedisch geordnet $\forall_{x\in\mathbb{R}_+}\ \forall_{y\in\mathbb{R}}\ \exists_{n\in\mathbb{N}}$: $n \cdot x > y$
  - zwischen je zwei reellen Zahlen liegt eine Rationale: $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$
  - Existenz von Wurzeln
  - $\mathbb{R}$ ist überabzählbar
  - Prinzip der Intervallschachtelung
- Hausdorfsche Trennungseigenschaft

  x,y Punkte eines normierten Raumes $\Rightarrow \exists$ U(x) und V(y) mit $U \cap V = \emptyset$

2 Stetige Abbildungen

- (punktweise) Stetigkeit mit Umgebungen

  f: A $\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

  $\forall_{\ x_0 \in A} \ \forall_{\ \epsilon > 0} \ \exists_{\ \delta > 0} \ \forall_{\ x \in A} \ : \ |x - x_0| \ < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

  Das δ kann von x_0 und ϵ abhängen

  Hierfür brauchen wir im $\mathbb{R}^n$ die Norm, weil sonst die Betragsstriche keinen Sinn hätten.

  f stetig in $x_o \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \ f(x) \ = \ f(x_0)$

  Also lim f(x) = c $\Rightarrow f_s(x) = \left\{ \begin{array}{ll} f(x) & x \neq x_o \\ c & x = x_0 \end{array} \right\}$ ist an Stelle x_0 stetig. Der Funktionswert wird nicht betrachtet. Funktion in x_0 stetig fortsatzbar

- Bei kleiner Änderung des Arguments ändert sich auch der Funktionswert nur wenig

- Wichtige Sätze

  Zwischenwertsatz (f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kompakt, stetig)

  jede stetige Funktion nimmt auf kompakten Intervall Max und Min an (f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)

- gleichmäßige Stetigkeit:

  $\forall_{\ \epsilon > 0} \ \exists_{\ \delta > 0} \ \forall_{\ x \in A} \ \forall_{\ x_0 \in A} \ : \ |x - x_0| \ < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

  Hier hängt δ nur von ϵ ab. Eine gleichmäßig stetige Abbildung ist offensichtlich (punktweise) stetig.

  Die gleichmäßige Stetigkeit sichert, das die Funktion nicht "so ins Unendliche abhaut" !

  Anschauliche Deutung: Man kann ein Rechteck finden, das man derart am Graphen der Funktion entlang fahren lassen kann, dass der Graph immer nur die vertikalen Seiten des Rechtecks schneidet.

  Sehr umständliches Kriterium, aber: eine stetige Abbildung auf einer kompakten Menge ist dort auch gleichmäßig stetig.

  Gleichmäßige Stetigkeit wird z.B. benutzt um zu zeigen, dass stetige Funktionen auf einem kompakten Intervall R-integrierbar sind.

- Folgenstetigkeit

  $\lim\limits_{k \to \infty} \ f(x_k) = f(\lim\limits_{k \to \infty} \ x_k)$

  Folgenstetigkeit und Stetigkeit sind äquivalent. (in normierten Räumen)

  $\lim\limits_{k \to \infty} x_k \to x_0 \Rightarrow f(\lim\limits_{k \to \infty} \ x_k) = f(x_0)$

- Norm (Längenfunktion)

  $|\,.\,|$ Norm X $\rightarrow \mathbb{R}$ mit Eigenschaften:

  (N1) Positive Definitheit $\forall_{\ x \in X}\ |x| > 0, x \neq 0$

  (N2) Homogenität $\forall_{\ x \in X}\ \forall_{\ \lambda \in \mathbb{R}}\ |\lambda \cdot x| = |\lambda| \cdot |x|$

  (N3) Dreiecksungleichung $\forall_{\ x,y \in X}\ |x + y| \leq |x| + |y|$

  normierter Raum: VR über $\mathbb{R}$ mit Norm

- Beispiele:

  $$1 - Norm\ x\ \mapsto\ |x| = |x|_1 = \sum_{i=1}^{n}\ |x_i|$$

  $$2 - Norm\ x\ \mapsto\ |x|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\ |x_i|^2}$$

  $$\infty - Norm\ x\ \mapsto\ |x|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n}\ |x_i|$$

  Im $\mathbb{R}^n$ sind diese Normen äquivalent. In jeden Kreis passt wieder ein Quadrat mit (Kreis mit Radius $\sqrt{2}$r $\Rightarrow$ Quadrat mit Radius r und umgekehrt in jedes Quadrat passt wieder ein Kreis mit gleichem Radius).

  Äquivalenz, weil je nach Wahl von ϵ die Umgebungen der jeweiligen Norm ineinander liegen (vgl. Zeichnungen)

  Ein weiterer Banachraum (vollständig und normiert) ist der auf einem Kompaktum K definierte Vektorraum aller stetigen Funktionen mit der Supremumsnorm. Falls $C^0(K)$ nicht kompakt, muss Beschränktheit der Funktionen verausgesetzt werden.

  Supremumsnorm: $||f|| = \sup\{|f(x)|\ |x \in K\}$

  Auch Maximum wäre möglich, da auf Kompaktum stetige Funktionen Minimum und Maximum annhemen.

- Veranschaulichung der Normen

  x $\in \mathbb{R}^2$: betrachte alle auf 1 normierten Vektoren $\{x \in \mathbb{R}^2 : ||x|| = 1\}$

  1-Norm: $\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\ |x_i| = |x_1| + |x_2| = 1$

  2-Norm: $\displaystyle\sqrt{\sum_{i=1}^{2}\ |x_i|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} = 1 \Leftrightarrow |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1$

  ∞-Norm: $\displaystyle\max_{i=1,2}\ |x_i| = \max\{|x_1|, |x_2|\} = 1$

- Banach-Räume

  normierte Räume heißen vollständig, wenn in ihnen jede Cauchy-Folge konvergiert

3 Topologie des $\mathbb{R}^n$

- Was ist kompakt?

  K $\subset$ X(normierter Raum)

  Aus jeder offenen Überdeckung von K kann man eine endliche Teilüberdeckung auswählen

  $$K \subset \bigcup_{k \in I} O_k \Rightarrow K \subset \bigcup_{k=k_1}^{k_n} O_k$$

  $\Leftrightarrow$ beschränkt und abgeschlossen (Satz von Heine-Borel)

- Was ist offen?

  Falls für jeden Punkt x $\in$ O eine Umgebung existiert, die wieder ganz in O enthalten ist

  (jede ϵ-Umgebung ist offen)

- Wie würden sie das einem Schüler erklären?

  Zeichnung aus Skript: um jeden Punkt kann man wieder einen "Kreis" malen, der wieder ganz in der Menge enthalten ist.

- Definition Vollständigkeit

  normierte Räume sind vollständig, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert (Banach-Räume)

  mit Hilfe der Supremumseigenschaft, Dedekindscher Schnitt zeigt man das $\mathbb{R}$ vollständig ist

- ϵ-Umgebung

  $U_\epsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n | \; |x - x_0| < \epsilon\}$

- G Gebiet

  Gebiet G im $\mathbb{R}^n$: offen und zusammenhängend

  n = 1 $\Rightarrow$ offene Intervalle

4 Punktfolgen und -reihen

- Konvergenz von Punktfolgen und -reihen

  $\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{m\in\mathbb{N}}\ \forall_{k\geq m}\ |x_k - x| < \epsilon$, wenn der Grenzwert x bekannt ist.

  $\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{m\in\mathbb{N}}\ \forall_{k,l\geq m}\ |x_k - x_l| < \epsilon$ ist Cauchy-Folge. Im $\mathbb{R}^n$ konvergiert eine Folge genau dann wenn sie Cauchy-Folge ist.

  In jeder ϵ-Umgebung des Grenzwerts liegen fast alle Folgenglieder.

- Beweis: konv. Folge $\Rightarrow$ Cauchy-Folge (gilt immer)

  (x_k) konvergiert

  $\Rightarrow \forall\ _{\epsilon>0}\ \exists_{m\in\mathbb{N}}\ \forall_{k\geq m}:\ |x_k - x|\ <\ \frac{\epsilon}{2}$

  $\Rightarrow \forall\ _{\epsilon>0}\ \exists_{m\in\mathbb{N}}\ \forall_{k,l\geq m}:\ |x_k - x_l|\ \leq\ |x_k - x| + |x - x_l| <\ \frac{\epsilon}{2} +\ \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

  $\Rightarrow (x_k)$ Cauchy-Folge

- Häufungspunkt (schwächeres Kriterium als Konvergenz)

  x $\in \mathbb{R}^n$ ist HP der Folge $(x_k \in \mathbb{R}^n)_{k\in\mathbb{N}}$, wenn in jeder Umgebung von x unendlich viele Folgenglieder liegen (eine konvergente Folge besitzt genau einen HP)

  HP ist bei abgeschlossener Menge in Menge enthalten, bei offener kann HP auf dem Rand (außerhalb) liegen.

  Folge im $\mathbb{R}^n$ muss keinen HP haben.

- Bolzano-Weierstraß

  Jede beschränkte Folge im $\mathbb{R}^n$ besitzt min. einen HP

  Jeder HP ist Grenzwert einer konvergenten Teilfolge

  Konstruktion der Teilfolgen: rekursiv, x HP der Folge:

  in U_1 Folgenglied x_{k_1}

  in $U_{1/2}$ Folgenglied x_{k_2}, $k_2 > k_1$,...,

  in $U_{1/L}$ Folgenglied x_{k_l}, $k_l > k_{l-1}$

  und erhält Teilfolge $(x_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$, mit k_l monoton wachsend und $\forall_l\ |x_{k_l} - x| < \frac{1}{l}$

  $\Rightarrow$ in jeder Umgebung $U_{1/l}$ liegen fast alle x_{k_l}'s

- Uneigentlich Konvergenz: Konvergenz gegen $+\infty$ $(-\infty)$

- Limes (spezielle HP)

  Limes superior $\overline{\lim_{k\to\infty}}\ x_k = \lim_{k\to\infty} sup\ x_k$ (Größter Häufungswert)

  $= \inf\{x \in \mathbb{R} \mid$ fast alle $x_k \leq x\}$

  Limes inferior $\underline{\lim}_{k\to\infty}\ x_k = \lim_{k\to\infty}\ inf\ x_k$ (Kleinster Häufungswert)

  Ein Folge (x_k) konvergiert $\Leftrightarrow$ beschränkt und $\overline{lim}\ x_k = \underline{lim}\ x_k$

  (Anwendung bei Bestimmung des Konvergenzradius)

- Eulersche Zahl

  $(1+\frac{1}{n})^n \to_{n\to\infty} \mathrm{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

- unendliche Reihe

  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ (Folge von Partialsummen oder Grenzwert)

  alternierend: abwechseld positive und negative Glieder

- Konvergenz von Reihen (Cauchy)

  $\forall_{\ \epsilon>0}\ \exists_{\ m\in\mathbb{N}}\ \forall_{\ l>j\geq m}\ :\ \left|\sum_{k=j+1}^{l} x_k\right| < \epsilon$

- Beispiele

  geordnete Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert für $|q| < 1$ gegen $\frac{1}{1-q}$

  harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert

  alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ konvergiert gegen log 2

- Kritierien

  notwendiges Kriterium: a_n muss Nullfolge bilden

  Leibnizkriterium: alternierende Nullfolge konvergiert

  Majorantenkriterium: es existiert für die Reihe eine konvergente Majorante

  Quotientenkriterium: $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right| \begin{matrix} < 1 \\ > 1 \end{matrix} \Rightarrow \sum x_k$ ist $\begin{matrix} \textit{absolut konvergent} \\ \textit{divergent} \end{matrix}$

  Wurzelkriterium: $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|x_k|} \begin{matrix} < 1 \\ > 1 \end{matrix} \Rightarrow \sum x_k$ ist $\begin{matrix} \textit{absolut konvergent} \\ \textit{divergent} \end{matrix}$

  Sind die Werte = 1 so sagen diese Kriterien meist nichts aus

- absolute Konvergenz

  wenn die Summe ihrer Beträge konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|$

  (wenn Folge der Partialsummen beschränkt)

  $\Leftrightarrow$ unbedingte Konvergenz (jede Umordnung konvergiert)

5 Funktionenfolgen (Folgen von Funktionen)

- punktweise Konvergenz

  $\forall_{\ x\in A}\ \forall_{\ \epsilon>0}\ \exists_{m\in\mathbb{N}}\ \forall_{k\geq m}\ :\ |f_k(x)-f(x)|\ <\ \epsilon$

  Zu jedem Punkt existiert individuelle Schranke, d.h. das m kann von ϵ und x abhängen.

- gleichmäßige Konvergenz

  $\forall_{\ \epsilon>0}\ \exists_{m\in\mathbb{N}}\ \forall_{k\geq m}\ \forall_{\ x\in A}\ :\ |f_k(x)-f(x)|\ <\ \epsilon$

  Zu jedem Punkt existiert eine bzgl. x globale Schranke, d.h. das m kann von ϵ abhängen.

  Veranschaulichung in $\mathbb{R}$: Die Graphen der Glieder f_k für $k\geq m$ liegen ganz in einem ϵ-Streifen um die Grenzfunktion f (fast alle Funktionen im ϵ-Streifen)

- gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen (-reihen) $\Rightarrow$ Grenzfunktion stetig

- bei gleichmäßiger Konvergenz können Grenzwerte vertauscht werden:

  $\lim\limits_{x\to x_0}\ \lim\limits_{k\to\infty}\ f_k(x)\ =\ \lim\limits_{k\to\infty}\ \lim\limits_{x\to x_0}\ f_k(x)$

- f_k konvergiert und f'_k konvergiert gleichmäßig

  $\lim\limits_{k\to\infty} f'_k = (\lim\limits_{k\to\infty} f_k)'$ bzw. $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k\right)' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f'_k$

- Cauchysches Konvergenzkriterium für gleichmäßige Konvergenz:

  $\forall_{\ \epsilon>0}\ \exists_{m\in\mathbb{N}}\ \forall_{k,l\geq m}\ \forall_{\ x\in A}\ :\ |f_k(x)-f_l(x)|\ <\ \epsilon$

- Majorantenkriterium für Funktionenreihen für gleichmäßige Konvergenz:

  $|f_k(x)|\leq c_k$ für alle x $\in$ A und fast alle k $\in\mathbb{N}$ mit c_k konvergente Majorante (für alle k, $c_k>0$)

- gleichmäßige Konvergenz bei Supremumsnorm

  $\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{m\in\mathbb{N}}\ \forall_{k\geq m}\ ||f_k-f||<\epsilon$

  $\Leftrightarrow \forall_{\epsilon>0}\ \exists_{m\in\mathbb{N}}\ \forall_{k\geq m}\ \forall_{x\in A}\ ||f_k(x)-f(x)||<\epsilon$

- Beispiel

  f: [0,1] $\to\mathbb{R}$ mit $f_k(x)=x^k$, stetig, aber Grenzfkt f: $\left\{\begin{array}{cc} 0 & 0\leq x<1 \\ 1 & x=1 \end{array}\right\}$ unstetig

6 Potenzreihen

- Potenzreihen sind besonders schöne unendliche Reihen

  $\sum f_k$ mit $f_k(x) = a_k\ (x - x_0)^k$ mit Entwicklungspunkt x_0

- Konvergenzradius R

  $\forall_x$: $|x - x_0| <$ R sind Potenzreihen absolut konvergent

  $\forall_x$: $|x - x_0| >$ R sind Potenzreihen divergent

  Bestimmung mit Formel von Hadamard

  $$\text{R} = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}|} \leq \infty$$

  $$\text{R} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\ \sqrt[k]{|a_k|}} \leq \infty \text{ (existiert immer)}$$

- Potenzreihe im gesamten Konvergenzintervall eine stetige Funktion, obwohl sie doch nur auf kompaktem Intervall innerhalb des Konvergenzkreise gleichmäßig konvergiert?

  Um beliebigen Punkt kann man kompaktes Intervall legen, dass immer noch ganz im Konverganzintervall liegt

- Abelscher Grenzwertsatz

  Auf dem ganzen Konvergenzkreis wird eine stetige Funktion definiert durch

  $K_r(x_0) = \{x \in K \mid |x - x_0| \leq r\},\ 0 < r < R$

  Falls Potenzreihe auf dem Rand konvergiert in x_1 mit Summe s $\Rightarrow$ stetige Funktion K_r konvergiert bei radialer Annäherung an x_1 gegen den Wert s.

- Bei Potenzreihen ist gliedweise Differentiation möglich (R ändert sich nicht)

- Lässt sich jede Funktion als Potenzreihe darstellen?

  Nein, exp(-1/x^2), weil das Restglied R(n) des Taylerpolynoms nicht $\to$ 0 geht

- Funktionen, die sich als Potenzreihe darstellen lassen heißen analytisch

- Cauchy-Produkt

  Multiplikation von zwei absolut konvergenten Reihen, Beweis mit Großem Umordnungssatz

  (jede Umordnung konvergiert, alle Zeilen- und Spaltenreihen sind absolut konvergent)

  $$\sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{r} a_j\ b_{r-j} \right) = \left(\sum_{0}^{\infty} a_j \right) \cdot \left(\sum_{0}^{\infty} b_k \right)$$

7 Taylor

- Funktion f in Umgebung von x_0 möglichst gut durch Polynome abschätzen
- fast alle elementaren Funktionen lassen sich als Potenzreihe darstellen
- Taylorpolynom im eindimensionalen

  $x \mapsto T_p(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$

  0-te bis p-te Ableitung und f stimmen im Punkt x_0 überein

- Taylor im mehrdimensionalen

  K = $(k_1, ..., k_n)$ Multiindex, $|K| = k_1 + ... + k_n$, Fakultät K! = $k_1! \cdots k_n!$, usw.

  T_r(x) = $\sum_{|K|=0}^{r} \frac{1}{k!} \partial^k f(x_0)(x - x_0)^K$

  (im mehrdimensionalen ist k = K ein Multiindex, Definitionsbereich: Gebiet)

- C^∞-Funktionen

  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$

  Die Funktion heißt analytisch, wenn sie in der Umgebung jedes Punktes x_0 eine Potenzreihendarstellung besitzt

- Taylor mit Restglied

  $T_{p|x_0}(x) + \frac{1}{(p+1)!} \Delta p(x)(x - x_0)^{p+1}$ (1. Art)

  $T_{p|x_0}(x) + \frac{1}{(p+1)!} f^{(p+1)}(\overline{x})(x - x_0)^{p+1}$ (Lagrange-Form)

  $t_{p|x_0}(x) + \frac{1}{p!} \int_{[x_0,x]} (x - t)^p f^{(p+1)}(t)dt$ (Integralform des Restglieds)

- Taylor mit 1.Form, Verallgemeinerung der Diffbarkeit (mehrdimensional)

  f(x) = f(0) + $\sum_j \partial_j f(0) x_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \Delta_{jk}(x) x_j x_k$

  f(x) = f(0) + <grad f(0),x> + $\frac{1}{2} x^T \cdot \Delta(x) \cdot x$ mit $\lim_{x \to 0} \Delta(x) = H_f(0)$

- Taylor mit 2.Form(Lagrange), Verallgemeinerung des MWS (mehrdimensional)

  f(x) = f(0) + <grad f(0),x> + $\frac{1}{2} x^T \cdot H_f(\upsilon \cdot x) \cdot x$ mit $\upsilon \in]0, 1[$

- Beispiel 1

  log(1+x) $= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$ mit KR = 1

  bei x = 1, log(2) $= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}$ konvergiert nach Leibniz $\Rightarrow$ log(2) $= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}$

- Beispiel 2 (lässt sich nicht als Potenzreihe darstellen)

  f(x) $= \left\{ \begin{array}{ll} e^{-\frac{1}{x^2}} & fuer\ x \neq 0 \\ 0 & fuer\ x = 0 \end{array} \right\}$

  Das Restglied stellt die Funktion dar

- Restglied

  Das Restglied kann also in Umbegung um Entwicklungspunkt konvergieren, nur im Entwicklungspunkt oder divergieren

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

- Äquivalente Definition der Differenzierbarkeit aus Taylor folgern

  f(x) = O(g(x)) für $x \to x_0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$

  (f geht stärker gegen 0 als g)

  $f(x) = T_{p|x_0}(x) + O((x - x_0)^p)$ mit p = 1

  $\Rightarrow$ f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + O(x-x_0)

  $\Leftrightarrow$ f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) = O(x-x_0)

  $\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \to (x \to x_0)\ 0$

  $\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to (x \to x_0)\ f'(x_0)$

- MWS der Differentialrechnung aus Taylor folgern

  $T_{p|x_0}(x) + \frac{1}{(p+1)!}f^{(p+1)}(\overline{x})(x - x_0)^{p+1}$

  mit p = 0: f(x) = f(x_0) + f'($\overline{x}$)(x-x_0)

  $\Leftrightarrow$ f'($\overline{x}$) = $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

- Definition der Diffbarkeit aus Taylor folgern

  $T_{p|x_0}(x) + \frac{1}{(p+1)!}\Delta p(x)(x - x_0)^{p+1}$

  p=0, f(x) = f(x_0) + Δ(x_0)(x-x_0)

  Δ(x_0) = f'(x_0)

8 Wichtige Sätze

- Banachscher Fixpunktsatz

  A, abgeschlossene Teilmenge des Banachraumes X und f: A $\subset$ X $\to$ A $\subset$ X eine kontrahierende Abbildung, d.h.

  $\forall_{x,y \in A}$ |f(y) - f(x)| $\leq$ L |y-x| mit 0 $\leq$L<1

  Dann besitzt f in A genau einen Fixpunkt $\overline{x} \in$ A mit f($\overline{x}$) = $\overline{x}$

  Man erhält ihn als Grenzwert für jede durch $\forall_{k \in \mathbb{N}}$: $x_{k+1} = f(x_k)$ rekursiv gebildete Folge bei beliebigem Startwert $x_0 \in$ A, und es gilt die Abschätzung

  $\forall_k$: $|x_k$ - $\overline{x}| \leq \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$

  Existenz des Grenzwertes wird durch Stetigkeit gesichert.

  Iteration ist Cauchy-Folge:

  $|f(y) - f(x)| \leq$ L $|y - x|$

  $\Rightarrow |f^2(y) - f^2(x)| = |f(f(y)) - f(f(x))| \leq$ L |f(y)-f(x)| $\leq L^2|y - x|$

  mit vollständiger Induktion

  $\forall_{k \in \mathbb{N}}$: $|f^k(y) - f^k(x)| \leq L^k|y - x|$

  Daraus folgt für beliebige k,j $\in \mathbb{N}$

  $|x_{k+j} - x_k| = |f^k(x_j) - f^k(x_0)| \leq L^k|x_j - x_0|$

  $\leq L^k(|x_j - x_{j-1}| + |x_{j-1} - x_{j-2}| + ... + |x_1 - x_0|)$

  $= L^k(|f^{j-1}(x_1) - f^{j-1}(x_0)| + ... + |x_1 - x_0|)$

  $\leq L^k(L^{j-1} + L^{j-2} + ... + L^0)|x_1 - x_0|$

  $$\leq L^k \cdot \sum_{j=0}^{\infty} L^j \ |x_1 - x_0| = L^k \ \frac{1}{1-L} \ |x_1 - x_0| \mapsto 0 \text{ (für k} \to \infty)$$

  $\Rightarrow$ Cauchy-Folge

  Diesen Satz braucht man für

  - Picard-Lindelöf $\Rightarrow$ Konstruktion geeigneter Quaderumgebungen
  - Satz über lokale Umkehrbarkeit
  - Satz über implizite Funktionen
  - Lagrange-Multiplikatoren

- Lipschitzstetig $\Rightarrow$ gleichmäßig stetig

  Wähle $\delta = \frac{\epsilon}{L}$ und setze in $\epsilon - \delta$-Kriterium für Stetigkeit ein

- Satz über lokale Umkehrbarkeit

  Sei f: G $\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar sowie $x_0 \in$ G mit regulärer Funktionalmatrix Df(x_0) (d.h. det Df(x_0) $\neq$ 0)

Dann gilt:

f ist um x_0 lokal invertierbar, d.h. es existieren offene Umgebungen U von x_0 und V von f(x_0) = y_0, so dass f$|_U$: U $\to$ V bijektiv ist

Die Umkehrabbildung f^{-1}: V $\to$ U ist ebenfalls stetig diffbar mit

$\forall_{y \in V}$: $Df^{-1}(y) = (Df(f^{-1}(y)))^{-1}$

Beweisidee:

Transformation auf Fixpunktproblem im Nullpunkt mit $x_0 = 0$ und f(x_0) = 0

- Nullstellenmenge $N_F(G)$

  $N_F(G) = \{(x, y) \in G \mid F(x, y) = 0\}$. Diese Nullenstellenmenge wird unter bestimmten Voraussetzungen zu Kurve mit y = f(x)

  notwendiges Kriterium: keine senkrechte Tangente

- Satz über implizite Funktionen

  Sei F: G $\subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ (x,y) $\mapsto$ F(x,y) eine C^1 Abbildung, sowie $(x_0, y_0) \in$ G mit F(x_0, y_0) = 0 und $D_yF(x_0, y_0)$ regulär.

  Dann gilt

  Es existieren offene Umgebungen U von x_0, V von y_0 mit U $\times$ V $\subset$ G und eine C^1-Abbildung f: U $\subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^m, x \mapsto f(x)$ mit

  graph f = $\{(x, f(x))|x \in U\} = \{(x, y) \in U \times V|F(x, y) = 0\} = N_F(U \times V)$

  Insbesondere ist $\forall_{x \in U}$: F(x,f(x)) = 0

  f hat Funktionalmatrix Df(x) = -$(D_yF)^{-1}$(x,f(x)) $\cdot$ D_xF(x,f(x)) (m x n) = (m x m) $\cdot$ (m x n)

  Beweisidee: Betrachte Hilfsabbildung (x,y) $\mapsto$ (x,F(x,y)) und Anwendung des lokalen Umkehrsatzes

- Wo D_yF, D_xF?

  nebeneinander (n+m)

- Lagrange Multiplikatoren (Extrema unter Nebenbedingung)

  Lokale Extrema von f auf der Nullstellenmenge $N_F(G)$

  f: G $\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; F: G $\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sind C^1-Abbildungen

  mit $x_0 \in$ G mit F(x_0) = 0 und rg DF(x_0) = m.

  Falls f in x_0 lokal extremal unter NB F = 0, so existieren sogenannte Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$ mit

  grad f = $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i gradF_i$

  (nur notwendiges Kriterium)

Man erhält hier Kandidaten. Hat zwar gleich viele Gleichungen (m+n) wie unbekannte, ist aber kein lineares Gleichungssystem, also nicht unbedingt lösbar. Man kann also nichts über die Existenz von Extrema sagen. Hilfe: Satz von Maximum und Minimum.

Beweisidee:

F: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, F(x) = 0 mit Satz über implizite Funktionen lokal auflösen und dann in f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ einsetzen.

- Ist f an den durch Lagrange Multiplikatoren erhaltenen Punkten immer extremal?

  Nein

- Keine Lagrange-Multiplikatoren da, was könnte man noch anwenden?

  Satz von Maximum und Minimum bei stetigen Funktionen

- Wo anwendbar?

  Wenn f(N_f) kompakt

- Picard-Lindelöf

  Sei (x,y) $\in$ G $\subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \mapsto$ f(x,y) $\in \mathbb{R}^m$ stetig und erfülle auf G eine lokale L-Bedindgung bzgl. y

  Dann gibt es zu jedem Punkt $(x^0, y^0) \in$ G eine kompakte Quaderumgebung $\overline{I} \times \overline{Q} \subset$ G mit der Eigenschaft:

  Das AWP y' = f(x,y), y(x^0) = y^0 besitzt auf $\overline{I}$ eindeutige Lösung y: $\overline{I} \to \overline{Q}$.

  Gewinnung durch Picardsche Iteration einer beliebigen C^0-Startfunktion y_0: $\overline{I} \to \overline{Q}$ mit $y_0(x^0) = y^0$

  $\forall_k$: y_{k+1} = Ty_k, y = $\lim\limits_{k\to\infty} y_k$

  Beweisidee:

  Anfangsnäherung y_0: $\overline{I} \to \mathbb{R}^m$ mit $y_0(x^0) = y^0 (etway_0 \cong y^0)$

  $y_1 = Ty_0$

  $y_2 = Ty_1$

  $\vdots$

  $y = Ty$

  Und Überprüfung der Vorraussetzungen für Banachschen Fixpunktsatz

9 Differentialrechnung

- Differenzierbarkeit

  f: I $\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

  Geometrische Deutung für lineare Funktion

  f(x) = f(x_0) + $\Delta(x - x_0)$: Steigung Δ (+Skizze)

  Bei beliebiger Funktion

  f(x) = f(x_0) + $\Delta(x)(x - x_0)$: Δ, die von x abhängige Sekantensteigung

  bei Grenzübergang x $\lim\limits_{x \to x_0} \Delta(x)$ definiert Tangente mit Tangentensteigung (m=1), bei m>1 Geschwindgikeitsvektor

  1. $\forall_{x \in I}\ f(x) = f(x_0) + \Delta(x) \cdot (x - x_0)$

  2. Δ ist in x_0 stetig

  f in x_0 diffbar $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ = f'(x_0) existiert (Differenzenquotient)

- Differenzierbarkeit mit Landau-Symbol

  f diffbar $\Leftrightarrow$ f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x-x_0)+O($|x - x_0|$)

  = f(x_0 + a $\cdot$ (x-x_0) + R(x)

  f lässt sich durch f(x_0 + a $\cdot$ (x-x_0) linear approximieren mit einem Restglied R(x) mit $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{R(x)}{x - x_0} = 0$

  Schreibweise R(x) = O(x-x_0) für $x \to x_0$ mit dem Landauschen O-Symbol

  allgemein: f(x) = O(g(x)) für $x \to x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ (f geht stärker gegen 0 als g)

- Differenzierbarkeit im Mehrdimensionalen

  f: G $\subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ heißt auf G differenzierbar, wenn ein Matrixfeld Δ: G $\mapsto$ M(m,n) = $\mathbb{R}^{m \cdot n}$ existiert mit:

  1. $\forall_{x \in G}\ f(x) = f(x_0) + \Delta(x) \cdot (x - x_0)$

  2. Δ ist in x_0 (komponentenweise) stetig

  Die Matrix Df(x_0) = $\Delta(x_0) \in$ M(m,n) ist Funktionalmatrix oder Jacobi-Matrix.

  f:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

  $$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & . & . & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ . & . & & . \\ . & & . & . \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & . & . & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

  oder $D_f(x_0) = (\partial_k f_j(x_0))_{jk}$

Offensichtlich ist f in x_0 differenzierbar $\Leftrightarrow \forall_{i=1}^{m}\ f_j$ in x_0 diffbar

f in x_0 differenzierbar $\Rightarrow$ f in x_0 stetig

- partielle Diffbarkeit

  übrige Variablen werden als Konstanten aufgefasst. Partielle Ableitungen müssen total stetig sein.

- Totale und partielle Diffbarkeit

  f: $G \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$

  in x_0 partiell diffbar $\Leftrightarrow$ alle partiellen Funktionen besitzen Tangenten in x_0

  in x_0 total diffbar $\Leftrightarrow$ f selbst besitzt Tangentialhyperebene in x_0

  total diffbar $\Rightarrow$ partiell diffbar

  stetig partiell diffbar $\Rightarrow$ total diffbar

- Gradient

  Für m = 1 (eindimensionaler Bildraum) nennt man Δ^T den Gradienten von f: grad f(x_0) = $\Delta^T(x_0)$.

  Geometrische Bedeutung $\begin{pmatrix} gradf(x_0) \\ -1 \end{pmatrix}$ ist der Normalenvektor der Tangentialhypereben in x_0.

  Man kann die Funktionalmatrix bzw. den Gradient schon berechnen, wenn f nur partiell diffbar ist.

  $\forall_x$ f(x) $= f(x_0) + \Delta$(x) $\cdot(x - x_0) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0) +$ r(x) mit $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{r(x)}{|x - x_0|} = 0$

  $\Leftrightarrow$ Abbildung f ist total diffbar!

  Landausche 0-Symbol $\Delta(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{|x-x_0|}(x - x_0)$

- Hesse-Matrix

  $$H_f(\xi) = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f(\xi) & . & . & \partial_1\partial_n f(\xi) \\ . & . & & . \\ . & & . & . \\ \partial_n\partial_1 f(\xi) & . & . & \partial_n\partial_n f(\xi) \end{pmatrix}$$

  H_f ist symmetrisch, da partielle Ableitungen vertauschbar bei totaler Diffbarkeit

- Lokale Extrema

  grad f = 0 $\Rightarrow$ Kandidaten auswählen und Hessematrix betrachten (Sattelpunkt, vgl. mit Gebirge)

- Extrema mit H_f bestimmen

  Bestimmung mit Hauptunterdeterminanten

  (positiv definit $\Leftrightarrow x^t H_f \mathrm{x} > 0 \ \forall_{x \in \mathbb{R}^n}$

  H_f positiv definit $\Leftrightarrow$ Minimum $\Leftrightarrow$ alle EW positiv

  H_f negativ definit $\Leftrightarrow$ Maximum $\Leftrightarrow$ alle EW negativ

  H_f positiv indefinit $\Leftrightarrow$ kein Extremum $\Leftrightarrow$ es ex positive und negativ EWe

  H_f bei semidefinitheit nicht entscheidbar

- Kann man i als Eigenwert der Hesseform erhalten?

  Nein, H_f ist symmetrisch, weil: f zweimal diffbar $\Rightarrow$ Ableitungen vertauschbar, und das charakteristische Polynom von symmetrischen Matrizen zerfällt über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren.

- Was passiert, wenn H_f singulär(nicht invertierbar)?

  Dann ist 0 Eigenwert, da der Kern von H_f dann nicht trivial.

  dim Ker = n - rg $H_f \Rightarrow H_f$ semidefinit, keine Entscheidung möglich

- Was ist Diffbarkeit anschaulich?

  Sekantenhyperebene geht bei Annäherung an x_0 über zu Tangentialhyperebene; bei Extrempunkten: horizontale Tangentialebene (Skizze)

10 Integralrechnung

- Riemannsche Integral über Quaderbereichen

  beschränkte Funktion f : Q $\subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{(m)}$ auf einem abgeschlossenen Quader Q = $I_1 \times ... \times I_n$ mit $\forall_{i=1}^{n}\ I_i = [a_i, b_i]$ durch Treppenfunktionen Φ approximieren.

- Begriffe (+Skizze)

  Elementarer Inhalt der Quader

  Zerlegung: (N+1)-elementige Teilmenge Z = $\{x_0, x_1, ..., x_N\}$ oder Z = $Z_1 \times ... \times Z_n$ (Teilquader)

  Längen $I_k = \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

  Feinheit: $||Z|| = max_{k=1,...,N}\ |I_k = \max\{||Z_1||, ..., ||Z_n||\}$ (größte Seitenlänge der Teilquader)

  Zwischenpunktvektor: N-Tupel zu Z = $\overline{x} = (\overline{x_1}, ..., \overline{x_N})$

  Riemannsche Summe $R_f(Z, \overline{x}) = \sum_{k=1}^{N}\ f(\overline{x_k})\ \Delta x_k$

  Variation: $V_f(Z) = \sum_{k=1}^{N}\ |\Delta_f|_{I_k} \cdot \Delta x_k$ und $\overline{R_f} - \underline{R_f} = V_f(Z)$

  mit $|\Delta_f|_{I_k} =$

- Warum existiert sup $\{|f(x) - f(x')|\ |\ x, x' \in I_k\}$?

  Da I_R beschränkt ist. I_R ist zwar auch abgeschlossen und somit kompakt, allerdings nehmen nur stetige Funktionen auf kompakten Mengen Maximum und Minimum an, also muss dieses nicht existieren.

- f R-integrierbar

  $\forall_{\epsilon>0}\ \exists_Z\ :\ V_f(Z) < \epsilon$

  R_f ist das R-Integral von f

  $lim_{||Z|| \mapsto 0}\ R_f(Z, \overline{x}) = \int_Q\ f(x)dx$

- Jede stetige und monotone Abbildung ist R-integrierbar

  Beweis:

  (stetig) f ist auf dem kompakten Intervall [a,b] gleichmäßig stetig:

  $\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x,x' \in [a,b]}$: $|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$. Ist Z eine Zerlegung von [a,b] mit Feinheit $||Z|| < \delta$, so gilt für alle k = 1,...,N und x,x'$\in I_k$: $|x - x'| < \delta$ $\Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\epsilon}{2(b-a)} \Rightarrow |\Delta f|_{I_k} \le \frac{\epsilon}{2(b-a)}$. Also ist $V_f(Z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} |\Delta f|_{I_k} \cdot \Delta x_k \le \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a) < \epsilon$

  Es gibt genau ein R_f mit $\forall_Z\ \forall_{\overline{x}}\ :\ |R_f(Z, \overline{x}) - R_f|\ \le\ V_f(Z)$

(monoton) Sei f monoton wachsand. Wir wählen eine äqidistante Zerlegung mit $|I_k| = \Delta x_k = \frac{b-a}{N}$. Wegen $|\Delta f|_{I_k} = f(x_k) - f(x_{k-1})$ gilt dann $V_f(Z) = \sum_{k=1}^{N} (f(x_k)) - f(x_{k-1}) \dfrac{b-a}{N} = \frac{(f(b)-f(a))(b-a)}{N} < \epsilon$, falls N genügend groß ist.

- R-integrierbar und Stammfunktion
  f stetig $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b = \int_{[a,b]}$
- Satz von Fubini für R-Integrale

$$\int_{P\times Q} f(x,y)d(x,y) = \int_P F(x)dx = \int_P (\int_Q f(x,y)dy)dx$$

- Muss $\overline{x}$ (Zwischenpunktvektor) in der Mitte liegen?
  Nein
- Erweiterung des Riemann-Integrals (über Jordan-messbaren Bereichen)
  triviale Fortsetzung der Funktion auf Quaderbereich
- Jordan-Maß
  μ(B) = $\int_B$ 1 dx = $\int_Q \chi_B$(x) dx
  mit Quader Q $\supset$ B. μ(B) ist das Jordan-Maß.
- J-Nullmenge
  μ(B) = 0 ($\Rightarrow \dot{B} = \emptyset$)
- Das innere Jordan-Maß
  B beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$
  $\underline{\mu}(B) = \sup\{|S| \mid S \subset B\}$
- Das äußere Jordan-Maß
  $\overline{\mu}(B) = \inf\{|T| \mid T \supset B\}$
- J-messbar
  $\overline{\mu}(B) = \underline{\mu}(B)$
- J-messbar $\Rightarrow$ R-integrierbar
  B J-Messbar und f beschränkt und fast überall stetig (bis auf eine J-Nullmenge)
  $\Rightarrow$ f ist über B R-integrierbar

- Ist diese Funktion R-integrierbar?

  Ja, Blöcke haben beschränkte und Konstante Höhe und somit lässt sich die Varianz beliebig klein machen.

  Es würden sogar bis zu endliche viele Blöcke möglich sein, bei ∞-vielen kann das allerdings schief gehen, siehe Dirichlet Funktion

- Beispiel nicht Riemann-integrierbarer Funktion

  Dirichlet-Funktion D(x) = $\left\{ \begin{array}{cc} 1 & x \; rational \\ 0 & x \; irrational \end{array} \right\}$

  weil abzählbar viele "Einzeleinträge" und nicht endlich viele, wie bei Riemann gefordet

- J-Messbarkeit

  μ(B) = $\int_B 1dx = \int_Q \chi_B(x)dx$ (falls im R-Sinne existent)

  Erklärung: n-dim Flächeninhalt (Grundfläche) $\times$ Höhe = n+1 dim.

- Wichtige Sätze bei J-messbaren Mengen

  - Bild einer kompakten J-Nullmenge unter L-stetigen Abbildung wieder J-Nullmenge
  - Graph einer R-integrierbaren Fuktion in $\mathbb{R}^{n+1}$ J-Nullmenge
    (f: B $\rightarrow \mathbb{R}$, graph f = $\{(x, f(x))|x \in B\}$)

- Uneigentliches R-Integral

  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{b \to 0} \int_b^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

- Lebesgue Maß

  B L-messbar $\forall_E$ $\overline{\lambda}(B \cap E) + \overline{\lambda}(Komplementv.B \cap E) = \overline{\lambda}$(E)

- Menge B = $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^2$ L-messbar?

  Ja mit λ(B) = 0, aber nicht J-messbar

- Lebesgue Maß $\leftrightarrow$ Jordan Maß

  L-Maß: Näherung durch abzählbare Quadersummen

  J-Maß: Näherung durch endliche Quadersummen

- Offene Mengen L-messbar? abzählbar unendlich viele Quader werden aufsummiert. Deshalb bei bel. offener Menge um jeden Punkt Quader legen mit Eckpunkten in $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$). $\mathbb{Q}$ ist abzählbar, somit kann man die Quader aufsummieren und erhält damit das offene Mengen L-messbar sind

- L-Integral

  als Infimum der von außen approximierten Quadersummen

- Beispiele

  - Beweis $(e^x)' = e^x$ mit (ln x und e^x sind Umkehrfunktionen zueinander)
    $[ln(e^x)]' = x'$
    $\Leftrightarrow 1 = \frac{1}{e^x}(e^x)'$
    $\Leftrightarrow e^x = (e^x)'$
  - Stammfunktion und Integralfunktion
    Stammfunktion f(x) $\Rightarrow$ F(x) = ln(x)
    Integralfunktion für $x > 0$ $F_a(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{1}{t}$ dt = lnx - lna $\Rightarrow$ -lna = 0 $\Rightarrow$ a = 1
    F(x) = $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}$ dt
    Für a = 1 sind beide Stammfunktion und Integralfunktion gleich
  - $\int \sqrt{1+e^{2x}}$ dx
    Substitution $\sqrt{1+e^{2x}}$ = u
    $\frac{du}{dx} = \frac{1 \cdot e^{2x} \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{u^2-1}{u}$
    $\int \frac{u^2}{u^2-1}$ du = $\int 1 + \frac{1}{u^2-1}$ du = $\int 1 + \frac{1}{(u-1)(u+1)}$

- Satz von Lebesgue
- Satz von Beppo Levi
- Existiert Menge die nicht L-messbar?

  Ja, mit Auswahlaxiom konstruierbar

11 Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung

-